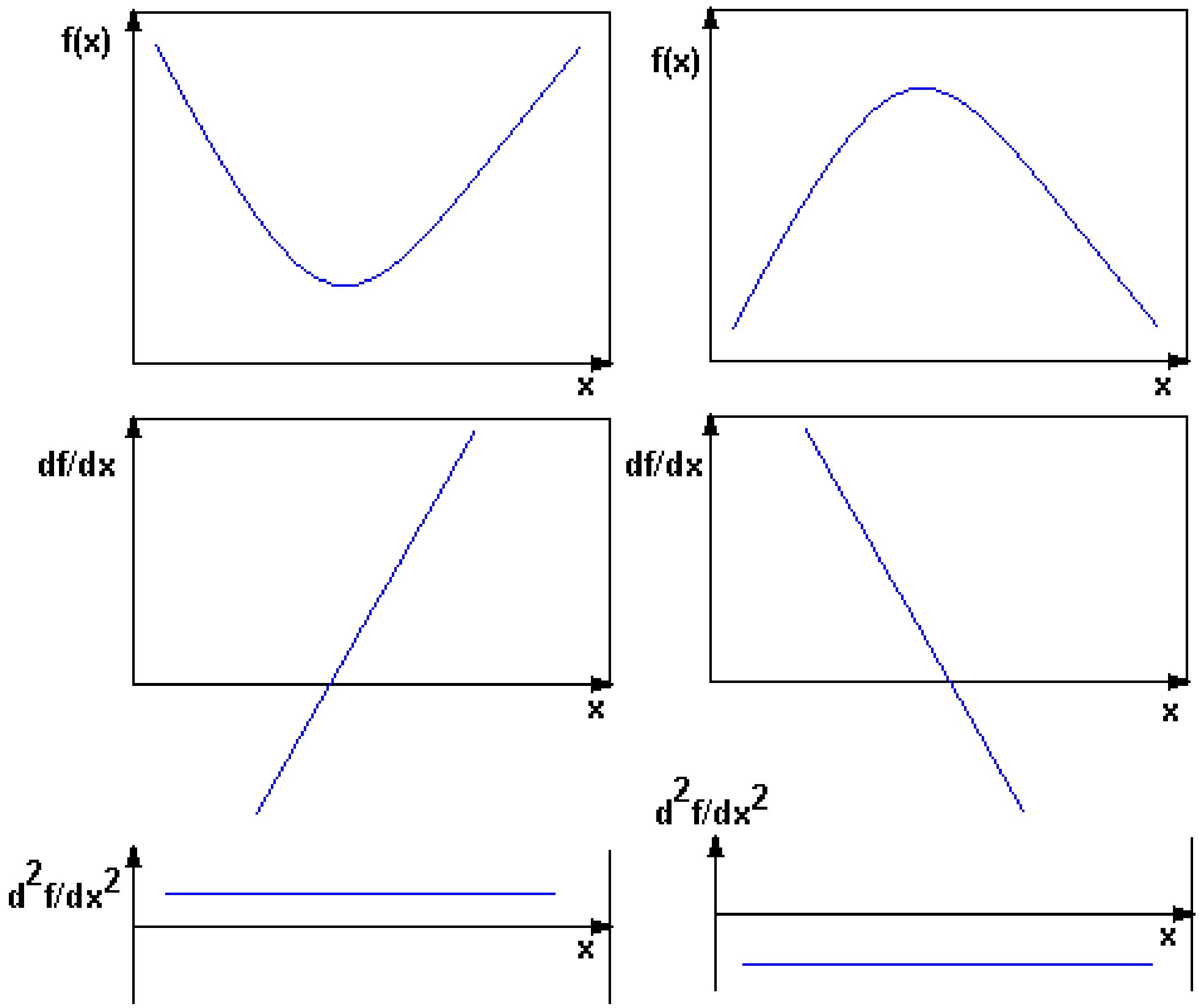
Optimizacion con MATLAB

René Huerta , Javier López Rubio & Martín Rivera Toledo

Introducción

1. Convexidad y concavidad



2. Sistemas multivariables

$$\min f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

sujeta a

$$h_j(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \qquad j = 1,2,...,m$$

$$g_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \qquad k = 1,2,..., p$$

condiciones necesarias y suficientes para un mínimo local

caso a. Sin restricciones

$$\nabla f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = 0 \qquad \&$$

$$H(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \text{ sea semi-definida positiva}$$

donde

$$[\nabla f]_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \& \qquad [H]_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

caso b. Con restricciones

si se define la función de Lagrange como

$$L(x_i, u_j, v_k) = f(x_i) + \sum_{j=1}^{m} h_j(x_i) u_j + \sum_{k=1}^{p} g_k(x_i) v_k$$

Las condiciones necesarias y suficientes están dadas por

$$\nabla L(x_i^*, u_j, v_k) = \nabla f(x_i^*) + \nabla h(x_i^*) u + \nabla g(x_i^*) v = \underline{0}$$

$u_i \geq 0$ deben de aplicar en una sola dirección

$$g_k(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \leq 0 \qquad k = 1,2,\ldots, p$$

$h_j(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 0 \qquad j = 1,2,\ldots, m$ de factibilidad

$$u_k g_k(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 0 \qquad k = 1,2,\ldots, p$$

complementarias

$$Z^T H(x_1^{\ *}, x_2^{\ *}, \ldots, x_n^{\ *})\, Z > 0$$ para todos los vectores

Z que cumplen con

$$J(x_1^{\ *}, x_2^{\ *}, \ldots, x_n^{\ *}) Z = \underline{0}$$ & los renglones son las

derivadas parciales de las restricciones que están activas en x^*, es decir, Z son las direcciones de las restricciones

I. Minimización de funciones de una variable

$$\min f(x)$$
$$\textit{sujeta a}$$
$$x_1 \leq x \leq x_2$$

Estructura en Matlab

[x,fval,exitflag,output]= **fminbnd** (fun,x1,x2,options)

Ejemplo [***fminvar.m***]

Calcular $\min f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 20$ con $0 \leq x \leq 2$

¿Tiene máximos esta función?, ¿cuáles son los puntos críticos?

II. Minimización de funciones de varias variables

1. Minimización de funciones sin restricciones

$$\min f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Estructura en Matlab

[x,fval,exitflag,output,grad,hessian] =

fminunc(fun,x0,options)

Ejemplo ***[prosenbrock.m & rosenbrock.m]***

$$\mathbf{Min\ f\ (x_1,x_2)\ =\ 100\ (\ x_2 - x_1^2\ )^2 + (\ 1 - x_1\ )^2}$$

Con un estimado inicial de **x1 = -1.2 & x2 = 1.0**

2. Minimización de una función con restricciones

$$\min f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

sujeta a

$$A\underline{x} \leq \underline{b}$$

$$A_{eq}\,\underline{x} = \underline{b_{eq}}$$ restricciones lineales

$$C\underline{x} \leq \underline{0}$$

$$C_{eq}\,\underline{x} = \underline{0}$$ restricciones no lineales

y con $\underline{x_{lb}} \leq \underline{x} \leq \underline{x_{ub}}$

Estructura en Matlab

[x,fval,exitflag,output,lambda,grad] =

fmincon(f,x0,A,b,Aeq,beq,xlb,xub,nonlcon,options)

Ejemplo 1 ***[ehlp8_26.m & p8_26]***

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sujeta a las restricciones siguientes

$$g1(x) = 2\,x_1 + x_2 \leq 5$$

$$g2(x) = x_1 + x_3 \leq 2$$

$$g3(x) = x_1 + 2\,x_2 + x_3 \leq 10$$

$$h1(x) = 2\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 = -2$$

$$h2(x) = 10\,x_1 + 8\,x_2 - 14x3 = 26$$

$$h3(x) = -4\,x_1 + 5\,x_2 - 6\,x_3 = 6$$

$$x_1 \geq 1 \quad x_2 \geq 2 \quad x_3 \geq 0$$

con x0=[-1 -1 -1]

Ejemplo 2 ***[ehlp_812.m & f_p812.m]***

$$\min f = (x_1-1)^2 + x_2^2$$

sujeto a las restricciones

$$h = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 = 0$$

$$g = -x_1 + x_2^2 \geq 0$$

con x0=[-1 -1]

3. Minimización de una función cuadrática

$$\min \frac{1}{2}(x_1, x_2, ..., x_n)^T [M](x_1, x_2, ..., x_n) + \underline{d}^T (x_1, x_2, ..., x_n)$$

sujeta a

$$A\underline{x} \leq \underline{b}$$

$$A_{eq}\,\underline{x} = \underline{b}_{eq}$$

$$\underline{x_{lb}} \leq \underline{x} \leq \underline{x_{ub}}$$

Estructura en Matlab

[x,fval,exitflag,output,lambda] =

quadprog(M,d,A,b,Aeq,beq,xlb,<u>xub</u>,x0,options)

Ejemplo 1 ***[qpehlp8_26.m]***

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sujeta a las restricciones siguientes

$$g_1(x) = 2 x_1 + x_2 \leq 5$$

$$g_2(x) = x_1 + x_3 \leq 2$$

$$g_3(x) = x_1 + 2 x_2 + x_3 \leq 10$$

$$h_1(x) = 2 x_1 - 2 x_2 + x_3 = -2$$

$$h_2(x) = 10 x_1 + 8 x_2 - 14x3 = 26$$

$$h_3(x) = -4 x_1 + 5 x_2 - 6 x_3 = 6$$

$$x_1 \geq 1 \quad x_2 \geq 2 \quad x_3 \geq 0$$

con x0=[-1 -1 -1]

el cual se puede expresar con la forma matricial

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$A_{eq} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 10 & 8 & -14 \\ -4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \qquad b_{eq} = \begin{bmatrix} -2 \\ 26 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{x}_{\mathrm{lb}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Minimización del problema de programación lineal

$$\min \underline{c}^T (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

sujeta a

$$A\underline{x} \leq \underline{b}$$

$$A_{eq}\,\underline{x} = \underline{b_{eq}}$$

Estructura en Matlab

[x,fval,exitflag,output,lambda] =

linprog(f,a,b,aeq,beq,lb,ub,x0,options)

Ejemplo 1 ***[liprogv102_2.m]***

$$\min f(x) = x_1 + x_2 + x_3$$

sujeta a las restricciones siguientes

$$g_1(x) = 2\,x_1 + x_2 \leq 5$$

$$g_2(x) = x_1 + x_3 \leq 2$$

$$g_3(x) = x_1 + 2\,x_2 + x_3 \leq 10$$

$$h_1(x) = 2\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 = -2$$

$$h_2(x) = 10\,x_1 + 8\,x_2 - 14x3 = 26$$

$$h_3(x) = -4\,x_1 + 5\,x_2 - 6\,x_3 = 6$$

$$x_1 \geq 1 \quad x_2 \geq 2 \quad x_3 \geq 0$$

5. Mínimos cuadrados no lineales

$$\min \sum_{k=1}^{p} \left[f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right]^2$$

sujeta a

$$\underline{x_{lb}} \leq \underline{x} \leq \underline{x_{ub}}$$

Estructura en Matlab

[x,resnorm,residual,exitflag,output,lambda,jacobian] =

lsqnonlin(fun,x0,lb,ub,options)

Ejemplo 1 ***[fminquad.m & xyquad.m]***

Calcule los parámetros a1, a2 & a3 para representar el conjunto de datos siguiente

Xi	10	20	30	40	50
Yi	1.0	1.26	1.86	3.31	7.08

Para el modelo

$$Y = ea_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

aplicando el método de mínimos cuadrados y trace la predicción del modelo