Capítulo 1 – Introdução Teórica

1.1 - Diagrama de Blocos

A representação dos sistemas físicos por meio de equações nem sempre deixa clara a relação entre as funções de entrada e de saída desses sistemas. É portanto conveniente e desejável sistematizar a descrição matemática de um sistema, de tal forma que aquela relação seja expressa claramente.

Uma forma de apresentação das equações diferenciais de um sistema consiste no emprego de **Diagramas de Bloco**, em que cada bloco representa uma operação matemática, associando pares entrada-saída.

Quando o sistema é linear, ou puder ser linearizado, é possível tomar as transformadas de Laplace das equações do sistema, considerando condições iniciais nulas.

A relação entre cada grandeza de saída e a correspondente grandeza de entrada se chama função de transferência.

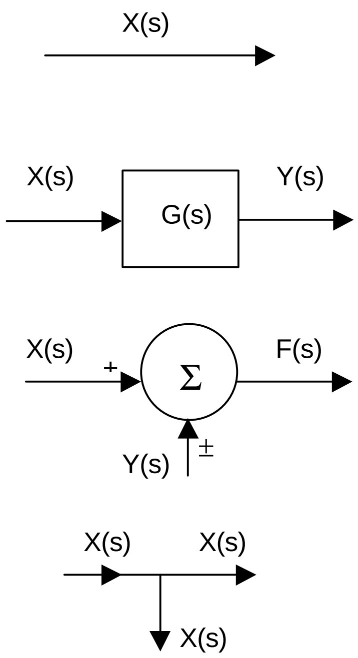
Usando as transformadas de Laplace, essas funções são em geral, funções de *s*. Quando essas funções são colocadas em vários blocos, o diagrama é chamado *Diagrama de Bloco*.

Em geral, os diagramas de bloco são úteis na visualização das funções dos diversos componentes do sistema, bem como permitem estudos de *"signal-flow"*.

Os diagramas e bloco são mais fáceis de desenhar do que os circuitos que eles representam. Partindo-se de um diagrama de bloco, é possível, mediante a utilização de regras especiais, denominadas "Álgebra dos diagramas de Bloco" reduzir o diagrama a um único bloco e, assim, achar a função global de transferência do problema, sem necessidade de resolver o sistema inicial de equações diferenciais que, algumas vezes, exige muito tempo devido ao elevado número de equações envolvidas.

1.1.1 - Símbolos

Os símbolos utilizados na técnica de diagramas de bloco são muito simples, e se encontram representados a seguir:



Variável X(s)

Operador

Variável de entrada – X(s)
Variável de saída – Y(s)
Função de transferência – G(s)
Relação representada – Y(s)=G(s) X(s)

Somador

Relação representada

F(s) = X(s) ± Y(s)

Tomada de Variável

Observar que a tomada de uma variável não altera seu valor. A variável X(s) chega ao nó e as variáveis transmitidas são iguais a X(s).

1.2 - Transformada de Laplace

A solução de equações diferenciais com excitações descontínuas ou de ordem superior a dois é muito trabalhosa através do método clássico. Além disso, a introdução de condições para a determinação das constantes de integração requer a solução de um sistema de equações algébricas em número igual à ordem da equação diferencial. Com o objetivo de facilitar e sistematizar a solução de equações diferenciais ordinárias lineares, a coeficientes constantes, utiliza-se exaustivamente o método da transformada de Laplace. Podem ser enumeradas as seguintes vantagens deste método moderno, que utiliza as transformadas:

1. Ele inclui as condições iniciais ou de contorno.
2. O trabalho envolvido na solução é simplesmente algébrico.
3. O trabalho é sistematizado.
4. A utilização de tabelas de transformadas reduz o volume de trabalho requerido.
5. Pode-se tratar excitações apresentando descontinuidades.
6. Os componentes transitório e de regime permanente da solução são obtidos simultaneamente.

A desvantagem dos métodos com transformadas é que se forem utilizados mecanicamente, sem conhecimento da teoria realmente envolvida, conduzem algumas vezes a resultados errôneos. Além disso, algumas equações particulares podem ser resolvidas mais simplesmente e com menos trabalho através do método clássico.

1.2.1 - Definição da Transformada de Laplace

A transformada direta de Laplace de uma função f(t), seccionalmente contínua no intervalo (0,∞), com valor f(t) é dada por:

$$\mathrm{L}\left[f(t)\right] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = F(s)$$

O valor da integral resulta numa função F(s), tendo *s* como variável. Este parâmetro *s* é uma grandeza complexa da forma $s + jw$. Deve-se ressaltar que os limites de integração são zero e infinito e que, portanto, não interessam os valores de f(t) para instantes negativos ou nulos.

1.2.2 - Transformação Inversa

A aplicação da transformada de Laplace transforma uma equação diferencial em equação algébrica. A partir da equação algébrica, obtém-se prontamente a transformada da função resposta. Para completar a solução deve-se encontrar a transformada inversa. Em alguns casos, a operação de transformação inversa

$$f(t) = L^{-1}\left[F(s)\right]$$

pode ser efetuada por referência direta a tabelas de transformadas ou por meio de programas de computador. Quando não é possível encontrar em tabelas a transformada da resposta, a técnica geral consiste em exprimir F(s) sob a forma de uma soma de frações parciais com coeficientes constantes. As frações parciais apresentam no denominador monômios ou binômios e suas transformadas são encontradas diretamente em tabelas. A transformada inversa completa é a soma das transformadas inversas das frações.

A transformada da resposta F(s) pode ser expressa em geral através da relação entre dois polinômios P(s) e Q(s). Considere-se que estes polinômios sejam de graus *w* e *n,* respectivamente, e que são ordenados segundo as potências decrescentes da variável *s*; assim,

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_w s^w + a_{w-1}s^{w-1} + \ldots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}$$

Os elementos *a* e *b* são constantes reais e o coeficiente da maior potência em *s* no denominador é reduzido à unidade. Serão consideradas somente as funções F(s) que são frações próprias para as quais *n* é maior que *w*. O primeiro passo é fatorar Q(s) em fatores do primeiro grau e em binômios com coeficientes reais:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_k)\ldots(s-s_n)}$$

Os valores s_1, s_2 ... s_n, finitos que anulam o denominador, são chamados zeros do denominador. Estes valores de s, que podem ser reais ou complexos, também tornam |F(s)| infinito e, e decorrência são chamados pólos de F(s). Em conseqüência, os valores s_1, s_2 ... s_n são referidos como zeros do denominador ou pólos finitos da função completa, isto é, há *n* pólos de F(s).

A transformada F(s) pode ser expressa como uma soma de frações. Se os pólos são simples (não repetidos), o número de frações é igual a *n* (número de pólos de F(s)). Em tais casos a função F(s) pode ser expressa sob a forma

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \ldots + \frac{A_k}{s - s_k} + \ldots + \frac{A_n}{s - s_n}$$

O problema agora é a determinação das constantes A_1, A_2, ..., A_n correspondentes aos pólos s_1, s_2 ... s_n. Os coeficientes A_1, A_2, ..., A_n são chamados resíduos de F(s) nos pólos correspondentes.

1.2.3 - Propriedades das Transformadas de Laplace

Função	**Transformada**
Af(t)	AF(s)
$f_1(t)+f_2(t)$	$F_1(s)+F_2(s)$
$\frac{d}{dt} f(t)$	sF(s)-f(0)
$\frac{d^2}{dt^2} f(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f(0)$
$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$S^nF(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$\int f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\left[\int f(t)dt\right]_{t=0}$
$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$
$e^{-at} f(t)$	F(s+a)
f(t-a)1(t-a), 1(t-a)= $\begin{cases} 1, t > a \\ 0, t \le a \end{cases}$	$e^{-as} F(s)$

tf(t)	$-\dfrac{dF(s)}{ds}$
$t^2f(t)$	$\dfrac{d^2}{ds^2}F(s)$
$\dfrac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(s)ds$
$f(\dfrac{t}{a})$	aF(as)
$f_1(t)*f_2(t)=$ $\int_0^t f_1(t-l)f_2(l)dl =$ $=\int_0^t f_1(t)f_2(t-l)dl$	$F_1(s).F_2(s)$
f(t).g(t)	$\dfrac{1}{2pj}F(s)*G(s)$

* indica o produto de convolução.

1.3 - Transformada Z

Os problemas de engenharia que utilizam a transformada Z surgiram da análise de sistemas de controle a dados amostrados, durante a Segunda Guerra Mundial, quando tais sistemas adquiriram proeminência. Sistemas a dados amostrados operam com funções discretas no tempo (ou amostrados), pou uma ou duas razões. Pode ser que os dados sejam disponíveis somente em instantes discretos (como num radar de exploração). É possível, por outro lado, que o uso dos dados amostrados permita projetar um sistema desempenho dinâmico melhor que o possível com dados contínuos no tempo. Como a transformada de Laplace era a principal ferramenta para estudar sistemas de controle contínuos no tempo, sua extensão a sistemas de dados amostrados era inteiramente natural.

A introdução da transformada Z é motivada pelas mesmas considerações que fazem a transformada de Laplace útil: as equações de diferenças que governam o comportamento do sistema discreto são transformadas em equações algébricas, freqüentemente mais simples de resolver que as equações originais, e capazes de dar melhor visão daquele comportamento.

Em análise de sistemas discretos no tempo por meio da transformada Z, os mesmos passos são empregados: os sinais discretos no tempo são substituídos por suas respectivas transformadas; o sistema é representado por uma “função de transferência discreta no tempo”que, como no caso contínuo, pode ser obtida pela combinação algébrica das funções de transferência discretas de seus componentes. A transformada Z da resposta discreta no tempo será igual ao produto da função de transferência do sistema psla transformada Z do sinal de entrada. Como último passo, a resposta real no domínio do tempo (discreta) será obtida por inversão da transformada Z da saída.

As principais diferenças entre a transformada de Laplace e a transformada Z são: a função elementar na qual os sinais são decompostos para obter a transformada Z é z^n (z uma variável complexa), em vez de e^{st}; a transformada Z é definida como uma soma em vez de integral.

1.3.1 - Definição da transformada Z

A transformada Z de um sinal discreto no tempo, f(n), é definida como uma série de potências em z^{-1} cujos coeficientes são amplitudes do sinal. Como no caso da transformada de Laplace, podemos definir uma transformada Z unilateral e uma bilateral. Estas definições são, respectivamente,

$$L_I[f(n)]=F_{II}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$$

$$L_{II}[f(n)]=F_{II}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$$

Para ser útil em análise de sistemas, é desejável que estas séries sejam exprimíveis em forma fechada. Como o coeficiente de z^{-n} no desenvolvimento em série é f(n), segue-se que o desenvolvimento da forma fechada em uma série de potências em z^{-n} “gerará” o sinal. Portanto, a transformada Z pode ser descrita como a “função geratriz” do sinal discreto no tempo ao qual ela corresponde. As potências negativa z^{-n} são mais usadas que as positivas z^n porque isso está de acordo com o uso mais freqüente em engenharia. Na literatura matemática sobre funções geratrizes e em alguma literatura sobre sistemas de controle a dados amostrados, os coeficientes das potências positivas de z, geralmente correspondem aos valores de f(n) para n>0.

Se f(n) = 0 para n < 0, as transformadas unilateral e bilateral são idênticas; porém, se f(n) $\neq$ 0 para algum n < 0 as duas definições produzirão expressões diferentes. A transformada Z bilateral obviamente incorpora informações sobre os valores f(n) em todos os instantes discretos em que é definida. A unilateral, só nos instantes não negativos.

1.3.2 - Transformadas de Funções Comuns

Função f(n)	Transformada Z F(z)	Raio de Convergência r_a
$d(n-k)$	z^{-1}	0
$m_1(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	1
a^n	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	a
n	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	1

1.3.3 - Inversão da Transformada Z

Para determinar o sinal f(n) correspondente a uma dada F(z), isto é, para gerar f(n), é necessário desenvolver F(z) em série de potências de z^{-1}. Como, em qualquer região de convergência, o desenvolvimento em série de potências é única. O método a empregar é uma questão de conveniência.

Obviamente, o método mais simples é procurar numa tabela adequada a função discreta no tempo no tempo correspondente à transformada que se quer inverter. É possível inverter a maioria das transformadas Z que aparecem em problemas de engenharia, por meio de uma pequena tabela e a técnica de decomposição em frações parciais.

Uma técnica mais elegante e geral é de usar a fórmula de inversão:

$$f(n) = \frac{1}{2pj} \oint_C F(z) z^{n-1} dz$$

onde C é um círculo de raio r > r_a, isto é, um círculo envolvendo todas as singularidades de $F(z)z^{n-1}$.

O cálculo real da equação anterior é muito eficientemente executado por meio do cálculo de resíduos. Especificamente, a equação pode ser escrita como:

f(n) = soma de resíduos do produto F(z) z^{n-1},

em seus pólos internos ao círculo de convergência de F(z).

Observe que, quando n = 0, F(z) z^{n-1} pode ter um pólo na origem mesmo quando F(z) não tem o resíduo de F(z) z^{-1} deve ser aí calculado.

Um terceiro método, que pode ser aplicado quando F(z) é racional, é exprimir numerador e denominador de F(z) em polinômios em z^{-1}; então, usando a “divisão contínua” da álgebra, dividir o numerador pelo denominador, e assim obter uma série em potências z^{-1}. Este método que não tem similar na transformada de Laplace é muito eficiente quando falta conhecimento dos pólos de F(z) e as tabelas de transformada Z ou a fórmula de inversão não podem ser usadas. Somente os valores de f(n), e não sua expressão geral, podem ser assim obtidos.

1.3.4 - Propriedades da transformada Z

Propriedade	Função do tempo	Transformada Z
Linearidade	$af(n)+bg(n)$	$aF(z)+bF(z)$
Diferenças a. Avançadas	$\Delta^k f(n)$	$(z-1)^k F(z) -$ $-z\sum_{j=0}^{k-1}(z-1)^{k-j-1}\Delta^j f(0)$
b. atrasadas	$\nabla^k f(n)$	$(1-z^{-1})^k F(z) -$ $-\sum_{j=0}^{k-1}(1-z^{-1})^{k-j-1}\nabla^j f(-1)$
Somas	$\sum_{k=-\infty}^{n} f(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}F(z)+$ $+\frac{1}{1-z^{-1}}\sum_{k=-\infty}^{-1} f(k)$
Translação	$F(n+k) \quad k>0$	$z^k F(z) - z^k \sum_{j=0}^{k-1} f(j) z^{-j}$
Multiplicação por a^n	$a^n f(n)$	$f(a^{-1}z)$
Multiplicação por n^k	$n^k f(n)$	$\left(z^{-1}\frac{d}{dz^{-1}}\right)F(z)$
Convolução	$y(n)=\sum_{k=0}^{n} h(n-k)x(k)$	$Y(z)=H(z)X(z)$
Produto de duas funções	$f(n)g(n)$	$\frac{1}{2pj}\oint_C \frac{F(w)G(zw^{-1})}{w}dw$
Mudança de escala	$f(an) \quad a = inteiros$	$F(z^{-a})$
Valor inicial	$f(0)=\lim_{z\to\infty} F(z)$	
Valor final	$f(\infty)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)$ $se\ (1-z^{-1})F(z)$ *é analítico para* $\lvert z\rvert \geq 1$	

1.3.5 - A Função de Transferência Discreta no Tempo

Como a função de transferência de sistema contínuo, a função de transferência discreta no tempo é definida para um sistema fixo e discreto como a trasnformada Z da resposta unitária h(n). Assim,

H(z) = *Z*[h(n)]

Para um sistema de entradas e saídas múltiplas, podemos definir a matriz de transferência discreta no tempo H(z) cujo elemento $H_{ij}(z)$ é a transformada Z da correspondente resposta unitária $h_{ij}(n)$.

Como conseqüência da propriedade de convolução, a relação de entrada e saída no domínio do tempo:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(n-k)x(k)$$

é convertida na relação algébrica no "domínio z":

Y(z)=H(z)Z(z)

Esta propriedade simplifica consideravelmente a análise dos sistemas fixos discretos no tempo; ela permite que tais elementos sejam analisados calculando as funções de transferência de cada um dos componentes e os combinando de acordo com as regras algébricas conhecidas. A resposta do sistema a uma dada entrada é então obtida invertendo o produto da função de transferência pela transformada da entrada. A técnica acompanha a de sistemas contínuos.

Em muitos casos, não é necessário executar esta última etapa; muitas propriedades úteis da resposta podem ser obtidas diretamente da função de transferência discreta no tempo. Dentre tais propriedades está a estabilidade do sistema e os valores final e inicial da resposta.

A função de transferência de um sistema contínuo no tempo pode ser interpretada como o quociente da resposta à uma exponencial complexa e^{st} por esta entrada fictícia e^{st}. Uma interpretação similar é possível para a transformada Z. Considere um sistema H ao qual a seqüência de entrada {..., z^{-2}, z^{-1}, 1, z, z^2, ...} é aplicada começando em $n = -\infty$. A resposta é:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} h(n-k)z^{k}.$$

Com a mudança de índice m = n – k, fica

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)z^{n-m} = z^{n}H(z).$$

Portanto segue-se que

$$H(z) = \frac{resposta \quad à \quad z^{n}}{z^{n}}.$$